ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES DES TRAVAUX PUBLICS DU BATIMENT DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1994

PREMIERE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Nota : Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

1) a) Calculer l'aire délimitée par la courbe L d'équation polaire $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

b) Calculer le rayon de courbure en un point de L en fonction de son angle polaire θ.

---

2) Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices complexes telles que $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$.

a) Comparer $\det B$ **et** $\det A$.

b) Soit σ une permutation de l'ensemble $[1,n]$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ transformant chaque vecteur e_k de la base canonique $\big((1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\big)$ en le vecteur $e_{\sigma(k)}$. Calculer le déterminant de φ.

c) Soit $\Omega = (\omega_{i,j})$ une matrice complexe telle que, pour tous les couples de matrices complexes $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ telles que $b_{i,j} = \omega_{i,j}\ a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$, on ait $\det B = \det A$. **Montrer que Ω est de rang un.**

d) Déterminer toutes les matrices Ω possédant la propriété étudiée à la question précédente.

---

6) Soient deux cercles de rayons différents R et r respectivement centrés aux points de coordonnées respectives $(a,0)$ et $(-a,0)$. Montrer que les droites D coupant ces deux cercles suivant des cordes de même longueur sont tangentes à une courbe simple C que l'on déterminera en fonction de a, R et r.

3) Soit $M_{a,b}$ la matrice réelle d'ordre 4 définie par l'égalité

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Peut–on trouver deux matrices distinctes semblables dans l'ensemble $\{M_{1,1},\ M_{1,0},\ M_{0,1},\ M_{0,0}\}$?

---

4) a) Soient trois vecteurs unitaires et indépendants (u, v, w) dans l'espace usuel, et (α, β, γ) les mesures entre 0 et π des angles qu'ils définissent deux à deux. Montrer l'inégalité

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

b) Soient (A, B, C) trois points non alignés d'un plan euclidien E. Un point O décrit le complémentaire de E dans l'espace. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de la somme des mesures entre 0 et π des angles en O des triangles OBC, OCA et OAB.

---

5) a) Soit a un nombre complexe. Expliciter un algorithme permettant de factoriser le polynôme $P(X) = aX^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour qu'il existe deux complexes r et s de parties réelles strictement positives tels que $P(X) = (r^2X^2 + 1)(s^2X^2 + 1)$.

c) On suppose désormais réalisée la condition ci–dessus. Calculer alors $r + s$.

d) Indiquer comment les calculs précédents permettent de calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{P(x)}.$$
